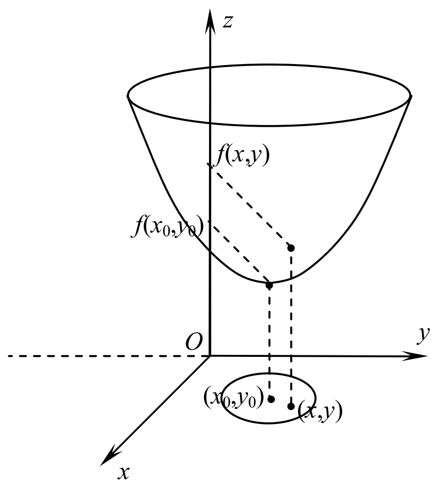
Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych - ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych

Definicja. Funkcja $z = f(x, y)$ ma w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ *minimum lokalne*, jeżeli istnieje otoczenie tego punktu takie, że dla dowolnego (x, y) z tego otoczenia zachodzi nierówność

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

Definicja. Funkcja $z = f(x, y)$ ma w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ *minimum lokalne właściwe* (rysunek 6), jeżeli istnieje sąsiedztwo tego punktu takie, że dla dowolnego (x, y) z tego sąsiedztwa zachodzi nierówność

$$f(x, y) > f(x_0, y_0).$$



Rys 6. Ilustracja pojęcia minimum lokalnego właściwego

Definicja. Funkcja $z = f(x, y)$ ma w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ *maksimum lokalne*, jeżeli istnieje otoczenie tego punktu takie, że dla dowolnego (x, y) z tego otoczenia zachodzi nierówność

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Definicja. Funkcja $z = f(x, y)$ ma w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ *maksimum lokalne właściwe*, jeżeli istnieje sąsiedztwo tego punktu takie, że dla dowolnego (x, y) z tego sąsiedztwa zachodzi nierówność

$$f(x, y) < f(x_0, y_0).$$

Twierdzenie. (*warunek konieczny istnienia ekstremum*)
Jeżeli funkcja $z = f(x, y)$ ma w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ pochodne cząstkowe i ma w tym punkcie ekstremum, to

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{i} \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Punkty, które spełniają powyższe warunki nazywamy *punktami stacjonarnymi*.

Twierdzenie. (*warunek wystarczający istnienia ekstremum*)
Jeżeli funkcja $z = f(x, y)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego w otoczeniu punktu $P_0(x_0, y_0)$ oraz spełnione są warunki:

1) $f'_x(x_0, y_0) = 0$ i $f'_y(x_0, y_0) = 0$,

2) $W(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$,

to funkcja f ma w punkcie P_0 ekstremum lokalne, przy czym

- jeżeli $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, to jest to minimum lokalne,
- jeżeli $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, to jest to maksimum lokalne.

Z powyższych twierdzeń wynika następujący algorytm wyznaczania ekstremów lokalnych funkcji dwóch zmiennych:

Schemat wyznaczania ekstremów lokalnych funkcji $z = f(x, y)$:

1. Znajdujemy pierwsze pochodne cząstkowe danej funkcji i przyrównujemy je do zera:

$$(*) \quad \begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}.$$

2. Rozwiązujemy układ $(*)$. Niech pary liczb:

$$(**) \quad (x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_n, y_n)$$

   będą rozwiązaniami tego układu.

3. Znajdujemy kolejno wszystkie pochodne cząstkowe rzędu drugiego i tworzymy wyznacznik:

$$W(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{vmatrix}.$$

4. W każdym punkcie $(**)$ obliczamy wartość wyznacznika $W(x, y)$. Jeżeli w danym punkcie (x_i, y_i) otrzymamy:

   a) $W(x_i, y_i) < 0$, to funkcja f w tym punkcie nie posiada ekstremum lokalnego,

   b) $W(x_i, y_i) = 0$, to mamy do czynienia z przypadkiem wątpliwym i ewentualne badanie, czy funkcja ma w tym punkcie ekstremum, przeprowadzamy innymi metodami (np. korzystając z definicji),

   c) $W(x_i, y_i) > 0$, to funkcja f posiada w tym punkcie ekstremum lokalne, przy czym:

   - jeżeli $f''_{xx}(x_i, y_i) > 0$, to w punkcie (x_i, y_i) mamy minimum lokalne,
   - jeżeli $f''_{xx}(x_i, y_i) < 0$, to w punkcie (x_i, y_i) mamy maksimum lokalne.

5. Wyznaczamy wartości ewentualnych ekstremów.

Uwaga. Powyższy schemat nie uwzględnia punktów, w których pochodne cząstkowe pierwszego rzędu nie istnieją, a funkcja ma w tych punktach ekstremum lokalne.

Przykład. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

a) $z = f(x, y) = x^3 + xy^2 + 6xy$, b) $z = f(x, y) = \mathrm{e}^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.

Rozwiązanie.

a) Obliczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu:

$$f'_x(x,y) = 3x^2 + y^2 + 6y \quad , \quad f'_y(x,y) = 2xy + 6x .$$

Przyrównujemy te pochodne do zera

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 + 6y = 0 \\ 2xy + 6x = 0 \end{cases} .$$

Z drugiego równania mamy

$2x(y+3) = 0$, a stąd $x = 0$ lub $y = -3$.

Otrzymane wartości podstawiamy do równania pierwszego:

- dla $x = 0$ mamy

  $y^2 + 6y = 0$,

  $y(y+6) = 0$,

  $y = 0$ lub $y = -6$.

  W tym przypadku mamy dwa punkty stacjonarne: $P_1(0,0)$, $P_2(0,-6)$.

- dla $y = -3$ mamy

  $3x^2 + 9 - 18 = 0$,

  $3x^2 - 9 = 0 \ / : 3$,

  $x^2 - 3 = 0$,

  $\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right) = 0$,

  $x = \sqrt{3}$ lub $x = -\sqrt{3}$.

  W tym przypadku również mamy dwa punkty stacjonarne: $P_3\left(\sqrt{3},-3\right)$, $P_4\left(-\sqrt{3},-3\right)$.

Aby sprawdzić, w których punktach stacjonarnych funkcja ma ekstrema, obliczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędy i tworzymy z nich wyznacznik $W(x,y)$:

$$f''_{xx}(x,y) = 6x \, , \; f''_{xy}(x,y) = 2y + 6 \, , \; f''_{yx}(x,y) = 2y + 6 \, , \; f''_{yy}(x,y) = 2x \, ,$$

a stąd

$$W(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 2y+6 \\ 2y+6 & 2x \end{vmatrix} .$$

W każdym punkcie stacjonarnym badamy wartość wyznacznika $W(x,y)$:

- Dla $P_1(0,0)$ mamy

  $$W(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 36 = -36 < 0 ,$$

  zatem w tym punkcie funkcja f nie posiada ekstremum.

- Dla $P_2(0,-6)$ mamy

  $$W(0,-6) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 36 = -36 < 0 ,$$

  zatem również w tym punkcie funkcja f nie posiada ekstremum.

- Dla $P_3\left(\sqrt{3},-3\right)$ mamy

$$W\left(\sqrt{3},-3\right)=\begin{vmatrix} 6\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix}=36-0=36>0,$$

czyli funkcja f posiada w punkcie P_3 ekstremum lokalne, a ponieważ $f''_{xx}\left(\sqrt{3},-3\right)=6\sqrt{3}>0$, to jest to minimum lokalne. Obliczamy wartość tego minimum

$$z_{\min}=f\left(\sqrt{3},-3\right)=\left(\sqrt{3}\right)^3+\sqrt{3}\cdot(-3)^2+6\cdot\sqrt{3}\cdot(-3)=3\sqrt{3}+9\sqrt{3}-18\sqrt{3}=-6\sqrt{3}$$

- Dla $P_4\left(-\sqrt{3},-3\right)$ mamy

$$W\left(-\sqrt{3},-3\right)=\begin{vmatrix} -6\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3} \end{vmatrix}=36-0=36>0,$$

czyli funkcja f posiada w punkcie P_4 ekstremum lokalne, a ponieważ $f''_{xx}\left(-\sqrt{3},-3\right)=-6\sqrt{3}<0$, to jest to maksimum lokalne. Obliczamy wartość tego maksimum

$$z_{\max}=f\left(-\sqrt{3},-3\right)=\left(-\sqrt{3}\right)^3+\left(-\sqrt{3}\right)\cdot(-3)^2+6\cdot\left(-\sqrt{3}\right)\cdot(-3)=-3\sqrt{3}-9\sqrt{3}+18\sqrt{3}=6\sqrt{3}$$

b) Dla funkcji $z=f(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2)$ obliczamy pierwsze pochodne i przyrównujemy je do zera

$$f'_x(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2)+\mathrm{e}^{x-y}2x=\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2+2x)\ ,$$

$$f'_y(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}(-1)(x^2-2y^2)+\mathrm{e}^{x-y}(-4y)=\mathrm{e}^{x-y}(-x^2+2y^2-4y).$$

Stąd

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2+2x)=0 \\ \mathrm{e}^{x-y}(-x^2+2y^2-4y)=0 \end{cases}.$$

Oba równania dzielimy przez e^{x-y}:

$$\begin{cases} x^2-2y^2+2x=0 \\ -x^2+2y^2-4y=0 \end{cases}.$$

Po dodaniu równań stronami mamy

$2x-4y=0$, a stąd $x=2y$.

Po podstawieniu do pierwszego równania otrzymujemy

$$4y^2-2y^2+2y=0,$$

$$2y^2+4y=0,$$

$$2y(y+2)=0,$$

$$y_1=0\ ,\quad y_2=-2.$$

Z równości $x=2y$ obliczamy:

$$x_1=0,\quad x_2=-4.$$

Mamy zatem dwa punkty stacjonarne: $P_1(0,0)$, $P_2(-4,-2)$.

Wyznaczamy teraz pochodne rzędu drugiego:

$$f''_{xx}=\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2+2x)+\mathrm{e}^{x-y}(2x+2)=\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2+4x+2),$$

$$f''_{xy} = \mathrm{e}^{x-y}(-1)(x^2 - 2y^2 + 2x) + \mathrm{e}^{x-y}(-4y) = \mathrm{e}^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y),$$

$$f''_{yx} = \mathrm{e}^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 4y) + \mathrm{e}^{x-y}(-2x) = \mathrm{e}^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y),$$

$$f''_{yy} = \mathrm{e}^{x-y}(-1)(-x^2 + 2y^2 - 4y) + \mathrm{e}^{x-y}(4y - 4) = \mathrm{e}^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 8y - 4).$$

Zatem

$$W(x,y) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 4x + 2) & \mathrm{e}^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y) \\ \mathrm{e}^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y) & \mathrm{e}^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 8y - 4) \end{vmatrix}.$$

Badamy wartość wyznacznika $W(x,y)$ dla wyznaczonych punktów stacjonarnych:

- Dla $P_1(0,0)$ mamy

  $$W(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8 < 0.$$

  Zatem w tym punkcie funkcja f nie posiada ekstremum.

- Dla $P_2(-4,-2)$ mamy

  $$W(-4,-2) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-2}(16 - 8 - 16 + 2) & \mathrm{e}^{-2}(-16 + 8 + 8 + 8) \\ \mathrm{e}^{-2}(-16 + 8 + 8 + 8) & \mathrm{e}^{-2}(16 - 8 - 16 - 4) \end{vmatrix} =$$

  $$= \begin{vmatrix} -6\mathrm{e}^{-2} & 8\mathrm{e}^{-2} \\ 8\mathrm{e}^{-2} & -12\mathrm{e}^{-2} \end{vmatrix} = 72\mathrm{e}^{-4} - 64\mathrm{e}^{-4} = 8\mathrm{e}^{-4} > 0.$$

  Funkcja f posiada zatem w punkcie P_2 ekstremum lokalne, a ponieważ $f''_{xx}(-4,-2) = -6\mathrm{e}^{-2} < 0$, to jest to maksimum lokalne. Obliczamy wartość tego maksimum

  $$z_{\max} = f(-4,-2) = \mathrm{e}^{-2}(16 - 8) = 8\mathrm{e}^{-2}.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

55. $z = 4x - 4y - x^2 - y^2$,

56. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$,

57. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y - 56$,

58. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 48x$,

59. $z = 2x^3 y + 2y^3 + 3x^2 + y^2 + 2y - 1$,

60. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$,

61. $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$,

62. $z = \mathrm{e}^{-x}(x + y^2)$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch